УДК 514.764.2

***С. Е. Степанов, И. И. Цыганок***

(*Финансовый университет при Правительстве РФ,
г. Москва*)

# О РАЗМЕРНОСТИ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА КОНФОРМНО КИЛЛИНГОВЫХ ФОРМ

Найдены точные границы размерностей векторных пространств конформно киллинговых, замкнутых и ко-замкнутых конформно киллинговых $r$-форм ($1 \le r \le n-1$) над $n$-мерным связным римановым многообразием.

***Ключевые слова:*** связное риманово многообразие, конформно киллинговы формы.

## §1. Определения и обозначения

**1.1.** Рассмотрим $n$-мерное $(n \ge 2)$ риманово многообразие $(M,g)$ со связностью Леви-Чивита $\nabla$. Обозначим через $\Lambda^r(M)$ модуль $r$-форм над алгеброй $C^\infty(M)$ гладких функций, определенных на $M$, и, выбирая локальную ориентацию $M$, ведем в рассмотрение оператор изоморфизм Ходжа $*: \Lambda^r(M) \to \Lambda^{n-r}(M)$ такой, что $g(\omega, *\vartheta) = (-1)^{r(n-r)} g(*\omega, \vartheta)$ и $*^2 = (-1)^{r(n-r)} Id_{\Lambda^r(M)}$ [1, с. 203]. Для *оператора внешнего дифференцирования* $d^r : C^\infty \Lambda^r(M) \to C^\infty \Lambda^{r+1}(M)$ определим [1, с. 204] ему формально сопряженный *оператор кодифференцирования* $\delta^r : C^\infty \Lambda^{r+1}(M) \to C^\infty \Lambda^r(M)$ следующим равенством: $\delta^r = (-1)^{(n-r)(r+1)} * d^{n-r-1} *$.

**1.2.** Зададим на многообразии $(M,\ g)$ естественный относительно изометрических диффеоморфизмов дифференциальный оператор первого порядка $D=\nabla-(r+1)^{-1}d^r-(n-r+1)^{-1}g\wedge\delta^{r-1}$ для $1\le r\le n-1$, операции внешнего умножения $\wedge$ дифференциальной $(r-1)$-формы $\delta^{r-1}\omega$ на метрический тензор $g$, которая определяется по закону

$$(g\wedge\delta^{r-1}\omega)(X_0,X_1,\dots,X_r)=$$
$$\sum_{a=1}^{r}(-1)^a g(X_0,X_a)\,(\delta^{r-1}\omega)(X_1,\dots,\hat{X}_a,\dots,X_r)$$

и произвольных $X_0,\dots,X_r\in C^\infty(TM)$. Здесь знак ^ над векторным полем $X_a$ означает отсутствие его в соответствующем слагаемом правой части равенства. Тогда условие $\omega\in Ker\,D$, равносильное уравнению

$$\nabla\omega=(r+1)^{-1}d^r\omega+(n-r+1)^{-1}g\wedge\delta^{r-1}\omega,$$

служит определением *конформно киллинговой r-формы* $(1\le r\le n-1)$ [2]. Множество *r*-форм, составляющих на $(M,g)$ ядро оператора $D$, образует векторное пространство $\mathbf{T}^r(M,\mathbf{R})$ конформно киллинговых *r*-форм, подпространство векторного пространства *r*-форм $\mathbf{\Omega}^r(M,\mathbf{R})$ над (*M, g*) [3].

Напомним [4, с. 46—47], что векторное поле *Z* на римановом многообразии (*M, g*) называется *инфинитезимальным конформным преобразованием,* или, иначе, *конформно киллинговым векторным полем*, если $L_Z\,g=2\sigma\,g$ для некоторой $\sigma\in C^\infty(M)$. Определим для векторного поля *Z* двойственную 1-форму $\omega$ равенством $\omega=g(Z,\,\cdot\,)$ и введем обозначение $\omega^\#=Z$. Тогда уравнению $L_Z\,g=2\sigma\cdot g$, определяющему инфинитезимальное конформное преобразование, можно придать вид $D\omega=\nabla\omega+2^{-1}d^1\omega-n^{-1}g\cdot\delta^0\omega$. Отсюда заключаем, что 1-форма $\omega$ для конформно киллингова векторного поля $Z=\omega^\#$ принадлежит ядру оператора *D*.

*Козамкнутая конформно киллинговая,* или *киллинговая r-форма ω,* подчиняется определяющему ее уравнению $\nabla\omega = (r+1)^{-1} d^r\omega$ [4, с. 55—56], которое равносильно условию $\omega \in \operatorname{Ker} D \cap \operatorname{Ker} \delta^{r-1}$. Все множество киллинговых $r$-форм образует векторное пространство $\mathbf{K}^r(M,\mathbf{R}) \subset \mathbf{T}^r(M,\mathbf{R})$ [3].

Напомним, что *инфинитезимальной изометрией,* или *киллинговым векторным полем* [4, с. 35—36] на многообразии ($M$, $g$), называется векторное поле $Z$ такое, что $L_Z g = 0$. Инфинитезимальное конформное преобразование $Z$ будет *инфинитезимальной изометрией* при условии $\sigma = 0$. Поскольку $\sigma = n^{-1}(-\delta^0\omega)$ для $Z = \omega^{\#}$, то произвольную инфинитезимальную изометрию можно определить как козамкнутое инфинитезимальное конформное преобразование. Поэтому киллинговая 1-форма $\omega$ будет двойственной формой для киллингова векторного поля $Z = \omega^{\#}$.

*Замкнутые конформно киллинговые r-формы* $(1 \le r \le n-1)$ определяются условием принадлежности $\operatorname{Ker} D \cap \operatorname{Ker} d^r$. Множество таких $r$-форм образует векторное пространство $\mathbf{P}^r(M,\mathbf{R}) \subset \mathbf{T}^r(M,\mathbf{R})$ [3].

Напомним, что векторное поле $Z$ называется *конциркулярным* [5], если $\nabla Z = \rho\, Id_M$ для $\rho \in C^\infty M$. В этом случае для 1-формы $\omega$ такой, что $\omega^{\#} = Z$, имеем $\nabla\omega = n^{-1}(-\delta^0\omega)g$. Следовательно, 1-форма $\omega$ является замкнутой конформно киллинговой формой.

## § 2. Размерности пространств конформно киллинговых форм

**2.1.** Рассмотрим связное многообразие ($M$, $g$). Условием интегрируемости уравнения $D\,\omega = 0$ служат тождества Риччи

[6, с. 42—43], имеющие в произвольной локальной системе координат $x^1,...,x^n$ многообразия $(M,g)$ следующий вид:

$$\nabla_j \nabla_k \ \omega_{i_1 i_2 \dots i_r} - \nabla_k \nabla_j \ \omega_{i_1 i_2 \dots i_r} = -\sum_{\alpha=1}^{r} \omega_{i_1 i_2 \dots i_{\alpha-1} l \, i_{\alpha+1} \dots i_r} R^l_{i_\alpha jk} \,, \quad (2.1)$$

где $\omega_{i_1 i_2 \dots i_r} = \omega\left(X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_r}\right)$ и $R^i_{jkl} X_i = R\left(X_k, X_l\right) X_j$ — локальные компоненты $r$-формы и тензора кривизны $R$ для $X_k = \partial / \partial x^k$ и $\nabla_k = \nabla_{X_k}$.

Тождества Риччи (2.1) дают ограничения не только на выбор компонент $r$-формы $\omega$, но и ограничения на кривизну $R$ многообразия $(M,g)$.

**Теорема.** *На n-мерном связном римановом многообразии (M, g) размерности* $t_r$, $k_r$ *и* $p_r$ *пространств конформно киллинговых* $\mathbf{T}^r(M,\mathbf{R})$, *козамкнутых конформно киллинговых (киллинговых)* $\mathbf{K}^r(M,\mathbf{R})$ *и замкнутых конформно киллинговых* $\mathbf{P}^r(M,\mathbf{R})$ *r-форм* $(1 \le r \le n-1)$ *имеют следующие ограничения*

$$t_r \le \frac{(n+2)!}{(r+1)!(n-r+1)!}; \; k_r \le \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}; \; p_r \le \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}.$$

*При этом равенства достигаются на многообразии постоянной ненулевой кривизны, где* $t_r = k_r + p_r$.

*Доказательство.* В тривиальном случае, когда $(M,g)$ является локально плоским многообразием, в работе [3] на основании (2.1) установлены в произвольной локальной декартовой системе координат $x^1,...,x^n$ компоненты $\omega_{i_1 \dots i_r} = A_{k i_1 \dots i_r} x^k + B_{i_1 \dots i_r}$ киллинговой $r$-формы $\omega$. Здесь $A_{k i_1 \dots i_r}$ и $B_{i_1 \dots i_r}$ — компоненты локальных постоянных кососимметричных $(r + 1)$-форм и $r$-форм соответственно.

Опираясь на этот результат в [7], найдены в некоторой локальной системе координат $x^1$, ..., $x^n$ многообразия

$(M,\ g)$ постоянной кривизны $C\neq 0$ компоненты $\omega_{i_1\dots i_r} =$ $= e^{(r+1)\varphi}\left(A_{k\,i_1\dots i_r}x^k + B_{i_1\dots i_r}\right)$ для $\varphi = \dfrac{ln(det\,g)}{2(n+1)}$ киллинговой $r$-формы $\omega$. А потому размерность пространства козамкнутых конформно киллинговых $r$-форм на римановом многообразии постоянной (в частности, нулевой) кривизны равно числу

$$k_r = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}\,.$$

В общем же случае $k_r \le \dfrac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}$.

Для многообразия $(M,g)$ постоянной кривизны $C \neq 0$ прямыми вычислениями [2] было доказано, что произвольная замкнутая конформно киллинговая $r$-форма $\omega$ имеет вид $\omega = -\dfrac{1}{r\,C}\nabla\theta$ для некоторой киллинговой $(r-1)$-формы $\theta$. С учетом этого в [7] найдены в некоторой локальной системе координат $x^1,\dots,x^n$ многообразия $(M,g)$ компоненты замкнутой конформно киллинговой $r$-формы

$$\omega_{i_1\dots i_r} = -\frac{1}{C}e^{(r+1)\varphi}\left(\varphi_{[i_1}A_{k\,i_2\dots i_r]}x^k + \varphi_{[i_1}B_{i_2\dots i_r]} + \frac{1}{r}A_{i_1\dots i_r}\right),$$

где $\varphi = \dfrac{ln(det\,g)}{2(n+1)}$, $\varphi_i = \partial_i\varphi$, $A_{i_1\dots i_r}$ и $B_{i_2\dots i_r}$ — локальные компоненты постоянных кососимметричных $r$-форм и $(r-1)$-форм соответственно. Заключаем, что на многообразии $(M,g)$ постоянной кривизны $C \neq 0$ размерность пространства конформно киллинговых $r$-форм

$$p_r = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!},$$

тогда как в общем случае $p_r \le \dfrac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$.

Для $(M,g)$ постоянной кривизны $C \ne 0$ прямыми вычислениями [2] было получено поточечное разложение произвольной конформно киллинговой $r$-формы $\omega$ в сумму $\omega = \omega_1 + \omega_2$ козамкнутой конформно киллинговой (киллинговой) $r$-формы $\omega_1$ и замкнутой конформно киллинговой (планарной) $r$-формы $\omega_2$. На этом основании размерность пространства конформно киллинговых $r$-форм на многообразии постоянной кривизны $C \ne 0$ будет равна

$$t_r = k_r + p_r = \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} = \binom{r+1}{n+2} = \frac{(n+2)!}{(r+1)!(n-r+1)!}.$$

В общем же случае число $t_r \le \dfrac{(n+2)!}{(r+1)!(n-r+1)!}$.

**2.2.** Из ограничений на размерности $t_r$ и $k_r$ векторных пространств конформно киллинговых $\mathbf{T}^r(M,\mathbf{R})$ и киллинговых $\mathbf{K}^r(M,\mathbf{R})$ $r$-форм при $r = 1$ получим в качестве следствия неравенства вида $t_1 \le ½\ (n+1)(n+2)$ и $k_1 \le ½\ (n+1)n$. И факт этот хорошо известен [5, с. 287], а именно: алгебра Ли группы $C(M, g)$ конформных преобразований связного риманова многообразия $(M, g)$ имеет размерность не бо́льшую, чем $1/2\,(n + 1)(n + 2)$, и реализуется в виде пространства конформно киллинговых векторных полей. Алгебра Ли ее подгруппы $I(M, g)$ движений имеет размерность не бо́льшую, чем $1/2\,(n + 1)n$, и реализуется в виде пространства киллинговых векторных полей. При этом равенства достигаются на многообразии постоянной кривизны.

Также из установленного неравенства для размерности $p_r$ заключаем, что размерность пространства конциркулярных векторных полей $p_1 \leq n+1$ и равенство достигаются на многообразии постоянной кривизны [9].

### *Список литературы*


1. *Petersen P.* Riemannian geometry. New York, 1997.
2. *Kashiwada T.* On conformal Killing tensor // Natural Science Report, Ochanomizi University. 1968. Vol. 19, N 2. C. 67—74.
3. *Степанов С.Е.* Векторное пространство конформно киллинговых форм // Записки научных семинаров ПОМИ. 1999. Т. 261. С. 240—265.
4. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. М., 1957.
5. *Yano K.* Concircular geometry // Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1940. Vol. 16. P. 195—200, 354—360, 442—448, 505—511.
6. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М., 1948.
7. *Степанов С.Е.* О тензоре Киллинга — Яно // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134, №3. С. 382—387.
8. *Vries H.L.* Über Riemannsche Räume die infinitesimale konforme transformationene gestätten // Math. Z. 1954. Vol. 60, N 3. P. 328—347.


S. Stepanov, I. Tsyganok

## ON A DIMENSION OF THE VECTOR SPACE OF CONFORMAL KILLING FORMS

In this paper we determine a sharp upper bound on the dimension of the space of conformal Killing forms and sharp upper bounds of dimensions of its two subspaces of closed and coclosed conformal Killing forms. This result is a corollary of our result which was published in the paper entitled “The Killing-Yano tensor” (see Theoretical and Mathematical Physics, 2003, Vol. 134, No. 3, 333—338). Moreover this result is a generalization of well known results on of sharp upper bounds of dimensions of vector spaces of conformal Killing, Killing and concircular vector fields.